Analiza funkcjonalna

Lista 6 (przestrzenie unitarne, przestrzenie Hilberta)

Zad 1. Niech H będzie przestrzenią unitarną i niech $x, y, z \in H$. Wykazać

a) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$ *(wzór polaryzacyjny)*

b) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *(prawo równoległoboku)*

c) $\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *(twierdzenie Pitagorasa)*

d) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ *(nierówność Schwartza)*

e) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(nierównośc trójkąta)*

Zad 2. Pokazać, że przestrzeń $C[a, b]$ nie jest przestrzenią Hilberta, a przestrzenie ℓ_p, L_p są przestrzeniami Hilberta tylko dla $p = 2$.

Zad 3. W przestrzeni Hilberta H wyznaczyć wysokość AD trójkąta ABC, gdzie

	H	A	B	C
a)	$L_2(0,1)$	1	t	t^2
b)	$L_2(-1,1)$	1	t	t^2
c)	$L_2(0,\pi)$	$\sin t$	$\sin 2t$	$\cos t$
d)	$L_2(0,1)$	t	t^2	t^3
e)	$L_2(0,1)$	1	e^t	e^{2t}
f)	$L_2(0,2\pi)$	e^{it}	e^{-it}	1

Zad 4. Wyznaczyć podprzestrzeń ortogonalną $M^{\perp}$ do M w przestrzeni ℓ_2, gdy

a) $M = \{x \in \ell_2 : x(1) + x(2) = 0\}$ *b)* $M = \{x \in \ell_2 : x(1) = x(2)\}$

c) $M = \{x \in \ell_2 : x(2n) = 0, n \in \mathbb{N}\}$ *d)* $M = \{x \in \ell_2 : x(1) = x(3) = x(5) = ...\}$.

Zad 5. W przestrzeni $L_2(0,1)$ wyznaczyć odległość elementu $x_0(t) = t$ od podprzestrzeni $L = \{x \in L_2(0,1) : \int_0^1 e^t x(t)dt = 0\}$.

Zad 6. W rzeczywistej przestrzeni Hilberta H wyznaczyć rzut ortogonalny wektora x_0 na podprzestrzeń L, gdy

	H	x_0	L
a)	ℓ_2	$x_0(k) = \frac{1}{2^k}$	$L = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x(k) = \frac{1}{3^k}, y(k) = \frac{1}{4^k}\}$
b)	ℓ_2	$x_0(k) = \frac{1}{3^k}$	$L = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x(k) = \frac{1}{5^k}, y(k) = \frac{1}{6^k}\}$
c)	$L_2(-\pi,\pi)$	$t + 1$	$L = \{x \in H : \int_{-\pi}^{\pi} \cos t x(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t x(t)dt = 0$
d)	$L_2(0,1)$	t	$L = \{x \in H : \int_0^1 x(t)dt = \int_0^{0,5} t \cdot x(t)dt = 0$
e)	ℓ_2	$x_0(k) = \frac{1}{2^k}$	$L = \{x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{3^k} = 0,\ x(1) - x(5) = 0$
f)	$L_2(-\pi,\pi)$	$t + 1$	$L = \{x \in H : \int_{-\pi}^{0} \cos t x(t)dt = \int_0^{\pi} \sin t x(t)dt = 0$

Zad 7. Niech $g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, i dla $n > 0$ niech

$$g_n(t) = \frac{1}{\pi}\cos(nt), \quad h_n(t) = \frac{1}{\pi}\sin(nt)$$

Sprawdzić, że zbiór powyżej zdefiniowanych funkcji jest zbiorem ortonornalnym w przestrzeni $L_2[-\pi, \pi]$ (w rzeczywistości jest to baza tej przestrzeni).

Zad 8. Wyznaczyć współczynniki Fouriera następujących funkcji

a) $x(t) = t$, b) $x(t) = 1 - t$, c) $x(t) = |t|$,

w przestrzeni $L_2[-\pi, \pi]$ i bazie zdefiniowanej w zadaniu 7.